

СИПКРО

МАТЕМАТИКА -10

Элективный курс: «Пределы. Геометрический смысл производной»

Разработали:

Каткова О.Ф , учитель математики

ГБОУ СОШ №2 п.г.т. Безенчук

Синёва О.В. , учитель математики

ГБОУ СОШ №4 п.г.т. Безенчук

Руководитель

кандидат педагогических наук

Максютин Алексей Алексеевич

Самара, 2013г.

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Предлагаемый курс своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 10 класса, которым интересна математика. Он предлагает изучение вопросов, которые не входят в школьный курс алгебры, и углубление отдельных тем школьной программы. Базовый уровень знакомит учащихся с определением производной через понятие предела, которое дается очень поверхностно, правилами вычисления производной, геометрическим и механическим смыслом производной, применением производной к исследованию функций и построением графиков (не затрагивая понятия асимптот, точек перегиба, выпуклости и вогнутости функций), и нахождением наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, решение геометрических задач с применением производной.

Данный элективный курс направлен на систематизацию и расширение знаний учащихся, способствует более осознанному освоению базового курса алгебры 10 класса.

ЦЕЛИ:

- углубление знаний учащихся теории пределов;
- развитие познавательной активности при решении задач прикладного характера на применение производной;
- формирование навыков анализа и систематизации, полученных ранее знаний в результате их применения в незнакомой ситуации

ЗАДАЧИ:

- овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для продолжения образования;

- интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления;
- приобщение уч-ся к работе с математической и справочной литературой;
- формирование опыта творческой деятельности уч-ся через исследовательскую деятельность при решении задач на максимум и минимум и построении графиков функций.

Включенный в программу материал имеет познавательный интерес для уч-ся и может применяться для разных групп школьников вследствие своей обобщенности и практической направленности. Развертывание учебного материала четко структурировано и соответствует задачам курса.

Установление степени достижения учащимися промежуточных и итоговых результатов производится на каждом занятии благодаря использованию практикумов, самостоятельных работ, тестов, консультаций.

Формой итоговой отчетности является итоговый двухчасовой тест.

Курс рассчитан на 34 часа.

Результаты освоения программы элективного курса

Изучение элективного курса дает возможность ученику научиться и достичь следующих результатов:

в направлении личностного развития:

- 1) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
- 2) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;
- 3) креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач;
- 4) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

в метапредметном направлении:

- 1) умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах;
- 2) умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять ее в понятной форме, принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;
- 3) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки;
- 4) умение применять индуктивные и дедуктивные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач;
- 5) понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;
- 6) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;
- 7) умение планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

в предметном направлении:

- 1) умение работать с математическим текстом (структурирование, извлечение необходимой информации)
 - распознавать, обследовать и разрешать проблемные ситуации из области математики;
- 2) овладение практически значимыми математическими умениями и навыками, их применение к решению математических задач, предполагающее умение:
 - находить наибольшее и наименьшее значение;
 - использовать геометрический смысл производной;

- использовать определение производной при решении:
 - а) практических задач
 - б) геометрических задач
- использовать основные теоремы о пределах, 1 замечательный предел для вычисления пределов функции;
- находить пределы функции в точке и на бесконечности;
- проводить полное исследование функций и строить графики этих функций;
- точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА.

1. Входной контроль – 1 час

2. Пределы – 8 часов

Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах. Первый замечательный предел. Основные приемы раскрытия неопределенностей.

3. Непрерывные и разрывные функции – 5 часов

Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва и их классификация. Свойства непрерывной функции. Метод интервалов. Асимптоты графика функции.

4. Дифференцирование функции одной переменной – 3 часа

Производная. Нахождение производных по определению. Дифференцируемость функции и непрерывность. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Дифференцирование тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций. Физический и геометрический смысл производной.

5. Исследование функций с помощью производной – 3 часа

Критические точки функции. Возрастание и убывание функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба функции. Общая схема исследования функции и построение ее графика. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке и на интервале. Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

6. Ключевые задачи по теме «Уравнение касательной» - 12 часов

7. Итоговый контроль – 2 часа.

ИТОГО: 34 часа.

ВХОДНОЙ ТЕСТ.

1 вариант.

Часть 1.

A1. Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 0,5x^2 -$

$3x + 2$ и вычислите ее значение при $x = -1$

а) -2,5; б) 1,5; в) -1,5; г) 2,5.

A2. Найдите производную функции $g(x) = \frac{3+2x}{x-5}$.

а) $-13/(x-5)^2$; б) $8/(x-5)^2$; в) $-5/(x-5)^2$; г) $(1-x)/(x-5)^2$.

A3. Для функции $g(x) = 3\sin^2x$ вычислите $g'(\pi/4)$.

а) 6; б) -3; в) -1,5; г) 0,5.

4. Дана функция $f(x) = x + \frac{8}{x}$. Решите уравнение $f''(x) =$

0.

а) 0 ; 2; б) $\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; г) -2 ; 2.

A5. Точка движется по координатной прямой по закону

$$S(t) = -t^2 + 10t - 7.$$

Найдите скорость движения точки в момент времени $t = 3$.

а) -5; б) 14; в) 19; г) 4.

A6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 4x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

а) $y = -2x - 3$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = -2x + 3$;

г) $y = 2x + 3$.

A7. Дана функция $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$. Найдите ее

критические точки.

а) 2 ; -1; б) 1 ; -2; в) -3 ; 1; г) -2 ; 3 .

Часть 2.

B1. Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = \frac{3x+2}{1-4x}.$$

B2. Найдите экстремумы функции $f(x) = (6-3x)\sqrt{x}$.

B3. При каком значении x функция $f(x) = x^3 - x^2$ на промежутке $[0,5 ; 1]$

принимает наименьшее значение.

Часть 3.

C1. Площадь прямоугольника равна 81 см^2 . Найдите наименьший возможный периметр этого прямоугольника.

ВХОДНОЙ ТЕСТ.

2 вариант.

Часть 1.

A1. Найдите производную функции $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 1,5x^2 + 5x - 3$ и вычислите ее значение при $x = -2$
а) -3; б) -5; в) 2; г) 3.

A2. Найдите производную функции $g(x) = \frac{4-3x}{x+2}$.
а) $2/(x+2)^2$; б) $-10/(x+2)^2$; в) $10/(x+2)^2$; г) $-2/(x+2)^2$.

A3. Для функции $f(x) = 5\cos^2x$ вычислите $f'(-3\pi/4)$.
а) 5; б) -10; в) -5; г) 10.

4. Дана функция $g(x) = 3x + \frac{9}{x}$. Решите уравнение $g''(x) = 0$.

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}; 3$; в) $0; \sqrt{3}$; г) $-\sqrt{3}; \sqrt{3}$.

A5. Точка движется по координатной прямой по закону
 $S(t) = -t^2 + 9t + 8$.

Найдите скорость движения точки в момент времени $t = 4$.

а) 9; б) 25; в) 1; г) -25.

A6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 6x + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

а) $y = 2x - 6$; б) $y = 10x + 12$; в) $y = 4x + 8$;
г) $y = -10x + 8$.

A7. Дана функция $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$. Найдите ее критические точки.

а) -1; 3; б) 0,5; 2; в) -1,5; 2; г) 1,5; -2.

Часть 2.

B1. Найдите промежутки убывания функции

$$f(x) = \frac{1+4x}{2x-3}.$$

B2. Найдите экстремумы функции $f(x) = (8 + 2x) / \sqrt{x}$.

B3. При каком значении x функция $f(x) = x^4 + x^3$ на промежутке $[-1; -0,5]$ принимает наименьшее значение.

Часть 3.

C1. Площадь прямоугольника равна 25 см^2 . Найдите наименьший возможный периметр этого прямоугольника.

КЛЮЧИ К ВХОДНОМУ ТЕСТУ.

Часть 1.

№ задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
1 вариант	в	а	б	в	г	в	а
2 вариант	а	б	в	г	в	б	г

КРИТЕРИЙ ОЦЕНИВАНИЯ.

№ задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	B1	B2	B3	C
Кол-во баллов	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3

Часть 2 и 3.

№ задания	B1	B2	B3	C
1 вариант	$(-\infty; 0,25) ; (0,25; +\infty)$	$\frac{2}{3}$	0,5	36 см
2 вариант	$(-\infty; 1,5) ; (1,5; +\infty)$	4	$-\frac{3}{4}$	20 см

«5» - 14 – 16 баллов

«4» - 11 – 13 баллов

«3» - 7 – 10 баллов

«2» - менее 7 баллов

Структура элективного курса по математике
«Пределы. Геометрический смысл производной».

Пределы

Исследование функции

Геометрический смысл производной

Б
У

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

1. Исследование и построение графика функции $y = f(x)$.
2. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

1. Составление уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = a$
2. Нахождение угла между графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$

П
У

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. Нахождение вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот к графику функции
2. Решение геометрических задач на составление функции и нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

1. Составление уравнения всех касательных к графику функции $y = f(x)$, проходящих через данную точку $M(x_0; y_0)$
2. Нахождение всех общих касательных к графикам функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.
3. Составление уравнения параболы, касающейся данной параболы в данной точке.
4. Нахождение геометрического места всех вершин парабол вида $y = \pm x^2 + ax + b$, касающихся данной прямой или параболы.
5. Задача нахождения всех точек плоскости, через которые проходят две взаимно перпендикулярные касательные к графику функции $y = x^2$.
6. Задача нахождения расстояния между касательными к графику и кратчайшего расстояния между графиками функций.

Входной контроль 1 час

Глава 1. Пределы (8 уроков).

№ п/п	Тема урока	Тип урока. Кол-во часов	Планируемые результаты	Планируемые результаты. Характеристика деятельности.				Дата
				Личностные УУД	Познавательные УУД	Коммуникативные УУД	Регулятивные УУД	
2/1	Предел функции в точке и на бесконечности	Урок изучения нового материала	Знать определение предела, свойства предела функции в точке	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	-Работа по алгоритму -моделирование, преобразование модели -сравнение, анализ -построение цепи рассуждений	Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Целеполагание, планирование, прогнозирование	
3/2	Основные теоремы о пределах	Урок изучения нового материала	Знать основные теоремы о пределах, уметь применять их.	Развитие познавательных интересов, нравственно-этическая ориентация	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ, работа с моделями	Сотрудничество с учителем	Моделировать ситуацию поведения	
4/3	Примеры вычисления пределов	Урок повторения и изучения нового материала	Знать основные теоремы о пределах, уметь применять их.	Умение ценить взаимопомощь, знание моральных норм поведения.	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы, работа с моделями	Соблюдать простейшие нормы речевого этикета. Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Корректировать способы действия Умение сохранять заданную цель.	
5/4	Решение задач	Закрепление знаний и	Знать основные теоремы о	Умение относиться к	Умение строить речевое	Сотрудничество с учителем и	Умение осуществлять	

		умений	пределах, уметь применять их.	окружающим, как к себе, развитие познавательных интересов и инициативы школьника, умение адекватно воспринимать оценку учителя	высказывание, моделирование, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы.	сверстниками. Умение вести диалог	самоконтроль в форме сличения с результатом, видеть указанную ошибку и исправлять её.	
6/5	Первый замечательный предел	Урок изучения нового материала	Знать теорему о первом замечательном пределе, уметь доказывать её и применять на практике.	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Умение сравнивать и анализировать, построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, работа с моделями	Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Целеполагание, планирование, прогнозирование Осуществлять самоконтроль в форме сличения результатов.	
7/6	Основные приёмы раскрытия неопределённостей	Комбинированный	Уметь применять таблицу раскрытия неопределённостей к решению пределов	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы	Участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Умение видеть указанную ошибку и исправлять её.	

					поиск путей решения проблемы.			
8/7	Решение задач	Закрепление знаний и умений	Уметь вычислять пределы	Умение ценить взаимопомощь, умение адекватно воспринимать оценку учителя	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ, обсуждение проблемы, поиск путей решения проблемы, работа с моделями	Соблюдать простейшие нормы речевого этикета. Умение вести диалог	Корректировать способы действия	
9/8	Решение задач	Урок применения практических навыков	Уметь вычислять пределы	Умение относиться к окружающим, как к себе, умение адекватно воспринимать оценку учителя	Умение сравнивать и анализировать, построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, работа с моделями	Сотрудничество с учителем и сверстниками, умение участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Умение осуществлять самоконтроль в форме сличения результатов, умение видеть указанную ошибку и исправлять её.	

Глава 2. Непрерывные и разрывные функции (5 уроков).

№ п/п	Тема урока	Тип урока. Кол-во часов	Планируемые результаты	Планируемые результаты. Характеристика деятельности.				Дата
				Личностные УУД	Познавательные УУД	Коммуникативные УУД	Регулятивные УУД	
10/1	Непрерывность функции в точке и на множестве.	Урок изучения нового материала	Знать определение функции непрерывной в точке и на множестве, уметь доказывать непрерывность функции	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы, работа с моделями	Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Целеполагание, планирование, прогнозирование	
11/2	Точки разрыва функции и их классификация	Урок изучения нового материала	Иметь понятие о точке устранимого разрыва, о точке разрыва I и II рода	Ценить взаимопомощь	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы, работа с	Участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Моделировать ситуацию поведения, умение сохранять заданную цель.	

					моделями			
12/3	Свойства непрерывной функции. Метод интервалов.	Урок повторения и изучения нового материала	Знать определение непрерывной функции, теорему о нуле непрерывной функции, понимать её геометрический смысл.	Развитие познавательных интересов, ценить взаимопомощь.	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ, работа с моделями	Соблюдать простейшие нормы речевого этикета. Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Корректировать способы действия умение планировать промежуточные цели с учетом конечного результата	
13/4	Асимптоты графика функции	Урок изучения нового материала	Знать определение горизонтальной и вертикальной асимптоты, наклонной асимптоты; знать алгоритм нахождения асимптот, уметь применять его.	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы, работа с моделями	Сотрудничество с учителем и сверстниками. Умение вести диалог	Умение видеть указанную ошибку и исправлять её.	
14/5	Решение задач	Урок применение практических навыков.	Уметь применять пределы при построении графика функции	Адекватное восприятие оценки учителя	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями,	.Сотрудничество с учителем и сверстниками, умение участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Корректировать способы действия умение планировать промежуточные цели с учетом конечного	

					работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы.		результата осуществлять самоконтроль в форме сличения результатов.	
--	--	--	--	--	--	--	--	--

Глава 3. Дифференцирование функции одной переменной (3 урока).

№ п/п	Тема урока	Тип урока. Кол-во часов	Планируемые результаты	Планируемые результаты. Характеристика деятельности.				Дата
				Личностные УУД	Познавательные УУД	Коммуникативные УУД	Регулятивные УУД	
15/1	Производная. Нахождение производных по определению. Дифференцируемость функции и непрерывность. Правила дифференцирования.	Урок повторения и изучения нового материала	Знать определение производной, правила дифференцирования, уметь вычислять производные по определению и по правилам дифференцирования	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Умение строить речевое высказывание, моделирование работа по алгоритму, сравнение, анализ, вывод правила	Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Планирование работы в группе и с учителем Моделировать ситуацию поведения	
16/2	Производная сложной	Урок повторен	Знать правила дифференцирован	Ценить взаимопомощь	Построение логической цепи	Сотрудничество с учителем и	Корректировать способы	

	функции. Дифференцирование тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций.	ия и изучения нового материала	ия сложной функции, тригонометрических функций и обратных тригонометрических, уметь применять их		рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы, работа с моделями	сверстниками, умение участвовать в коллективном обсуждении проблемы	действия умение планировать промежуточные цели с учетом конечного результата осуществлять самоконтроль в форме сличения результатов.	
17/3	Физический и геометрический смысл производной. Решение задач.	Урок примененные практические навыки	Знать физический и геометрический смысл производной, уметь применять их.	Умение относиться к окружающим, как к себе, умение адекватно воспринимать оценку учителя	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы.	Соблюдать простейшие нормы речевого этикета. Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Планирование работы в группе и с учителем Моделирование ситуации поведения, умение осуществлять самоконтроль в форме сличения результатов.	

Глава 4. Исследование функций с помощью производной (3 урока).

№ п/п	Тема урока	Тип урока. Кол-во	Планируемые результаты	Планируемые результаты. Характеристика деятельности.				Дата
				Личностные УУД	Познавательные	Коммуникативные	Регулятивные	

		часов			УУД	е УУД	УУД	
18/1	Критические точки функции. Возрастание и убывание функции. Необходимо и достаточное условие существования экстремума. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба функции. Общая схема исследования функции и построение её графика.	Комбинированный	Знать определение критических точек, признаки возрастания и убывания функции, условия экстремумов, выпуклости и вогнутости, знать общую схему исследования функции	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы.	Сотрудничество с учителем и сверстниками. Соблюдать простейшие нормы речевого этикета.	Планирование работы в группе и с учителем, умение осуществлять самоконтроль в форме сличения результатов.	
19/2	Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке и на	Урок применения практических навыков	Знать правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Уметь	Ценить взаимопомощь	Умение строить речевое высказывание, моделирование работа по алгоритму,	Участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Моделировать ситуацию поведения. Саморегуляция для преодоления	

	интервале. Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.		применять их к решению задач		сравнение, анализ, Построение логической цепи рассуждений		трудностей	
20/3	Решение задач	Урок применения практических навыков		Умение относиться к окружающим, как к себе, умение адекватно воспринимать оценку учителя	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ, обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы.	Сотрудничество с учителем и сверстниками, умение точно выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации, соблюдать простейшие нормы речевого элемента, вести диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблемы, -планировать работу в группе	Умение корректировать и оценивать свои знания и умения	

Глава 5. Ключевые задачи по теме «Уравнение касательной» (12 уроков).

№ п/п	Тема урока	Тип урока. Кол-во	Планируемые результаты	Планируемые результаты. Характеристика деятельности.				Дата
				ЛичностныеУУД	Познавательные	Коммуникативны	Регулятивные	

		часов			УУД	е УУД	УУД	
21/1	Уравнение касательной . Задача, связанная с определением того, является ли прямая $y=kx+v$ касательной к графику функции $y=f(x)$	Урок повторения и изучения нового материала	Знать уравнение касательной, уметь решать задачу, связанную с определением того, является ли прямая $y=kx+v$ касательной к графику функции $y=f(x)$	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы.	Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Целеполагание, планирование, прогнозирование	
22/2	Задача нахождения угла между графиками функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$	Урок изучения нового материала	Уметь находить угол между графиками функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$	Умение ценить взаимопомощь. нравственно-этическая ориентация знание моральных норм поведения, умение относиться к окружающим, как к себе, развитие познавательных интересов и инициативы школьника.	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы	Участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Моделировать ситуацию поведения	

23/3	Задача составления уравнения всех касательных к графику функции $y=f(x)$, проходящих через данную точку $M(x_0; y_0)$, не лежащую на графике; исследование решения.	Урок повторения и изучения нового материала	Уметь составлять уравнения всех касательных к графику функции $y=f(x)$, проходящих через данную точку $M(x_0; y_0)$, не лежащую на графике.	Развитие познавательных интересов, ценить взаимопомощь.	Умение строить речевое высказывание, моделирование работа по алгоритму, сравнение, анализ, Построение логической цепи рассуждений	Соблюдать простейшие нормы речевого этикета. Сотрудничество с учителем и сверстниками. Участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Корректировать способы действия Умение сохранять заданную цель. Умение видеть указанную ошибку и исправлять её	
24/4	Задача нахождения общей касательной к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в их общей точке.	Урок изучения нового материала	Уметь находить общую касательную к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в их общей точке.	Умение ценить взаимопомощь. нравственно-этическая ориентация знание моральных норм поведения, умение относиться к окружающим, как к себе, развитие познавательных интересов и инициативы школьника.	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы.	Сотрудничество с учителем и сверстниками. Умение вести диалог	Умение планировать промежуточные цели с учетом конечного результата, осуществлять самоконтроль в форме сличения с результатом.	

25/5	Задача нахождения всех общих касательных к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.	Урок изучения нового материала	Уметь находить все общие касательные к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников Адекватное восприятие оценки учителя	Построение логической цепи рассуждений работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ, обсуждение проблемы, поиск путей решения проблемы.	Сотрудничество с учителем и сверстниками.	Осуществлять самоконтроль в форме сличения результатов.	
26/6	Задача нахождения всех общих касательных к графикам квадратичных функций $f(x)$ и $g(x)$.	Комбинированный	Уметь находить все общие касательные к графикам квадратичных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$	Развитие познавательных интересов и инициативы школьников	Умение строить речевое высказывание, моделирование работа по алгоритму, сравнение, анализ, Построение логической цепи рассуждений	Участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Умение видеть указанную ошибку и исправлять её.	
27/7	Задача составления уравнения параболы вида $y=-x^2+px+g$, касающейся параболы $y=x^2-6x+5$ в точке с абсциссой $x=2\dots$	Закрепление знаний и умений	Уметь составлять уравнение параболы вида $y=-x^2+px+g$, касающейся параболы $y=x^2-6x+5$ в точке с абсциссой $x=2\dots$	Умение ценить взаимопомощь. знание моральных норм поведения, умение относиться к окружающим, как к себе, развитие познавательных интересов и инициативы школьника.	Построение логической цепи рассуждений, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждение проблемы поиск путей решения проблемы, работа с моделями	Соблюдать простейшие нормы речевого этикета	Корректировать способы действия	

28/8	Задача нахождения геометрического места всех вершин парабол $y=x^2+ax+b$, касающихся прямой $y=4x-1$	Урок применени е практическ их навыков	Уметь находить геометрическое место всех вершин парабол $y=x^2+ax+b$, касающихся прямой $y=4x-1$	Развитие познавательных интересов, ценить взаимопомощь.	Умение строить речевое высказывание, моделирование работа по алгоритму, сравнение, анализ, Построение логической цепи рассуждений	Участвовать в коллективном обсуждении проблемы	Умение видеть указанную ошибку и исправлять её.	
29/9	Задача нахождения геометрического места всех вершин парабол $y=-x^2+ax+b$, касающихся параболы $y=x^2$	Урок применени е практическ их навыков	Уметь находить геометрическое место всех вершин парабол $y=x^2+ax+b$, касающихся параболы $y=x^2$	Умение относиться к окружающим, как к себе, умение адекватно воспринимать оценку учителя	Умение строить речевое высказывание, моделирование работа по алгоритму, сравнение, анализ, Построение логической цепи рассуждений	Сотрудничество с учителем и сверстниками, умение точно выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации, соблюдать простейшие нормы речевого элемента, вести диалог, планировать работу в группе	Умение видеть указанную ошибку и исправлять её, планировать промежуточные цели с учетом конечного результата, осуществлять самоконтроль в форме сличения с результатом.	
30/10	Задача нахождения всех точек плоскости, через	Урок применени е практическ их навыков	Уметь находить все точки плоскости, через которые проходят две взаимно	Умение относиться к окружающим, как к себе, умение адекватно	Построение логической цепи рассуждений работа с моделями, работа по алгоритму,	Сотрудничество с учителем и сверстниками, умение точно выражать свои	Умение планировать промежуточные цели с учетом	

	которые проходят две взаимно перпендикулярные касательные к графику функции $y=x^2$		перпендикулярные касательные к графику функции $y=x^2$	воспринимать оценку учителя	сравнение, анализ, обсуждение проблемы, поиск путей решения проблемы.	мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации, соблюдать простейшие нормы речевого элемента, вести диалог, планировать работу в группе	конечного результата, осуществлять самоконтроль в форме сличения с результатом.	
31/11	Задача нахождения расстояния между касательными к графику функции $y = \frac{x-3}{x-2}$, образующими с положительным направлением оси абсцисс угол 45°	Урок применения практических навыков	Уметь находить расстояния между касательными к графику функции $y = \frac{x-3}{x-2}$, образующими с положительным направлением оси абсцисс угол 45°	Умение ценить взаимопомощь, развитие познавательных интересов и инициативы школьника, умение адекватно воспринимать оценку учителя	Умение строить речевое высказывание, -моделирование, -работа по алгоритму, -формирование проблемной ситуации, -создание способов решения проблемы, -сравнение, анализ, -работа с моделями.	Умение точно выразить свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации, соблюдать простейшие нормы речевого элемента, вести диалог, планировать работу в группе	Целеполагание, планирование работы в группе и с учителем, корректировать способы действия, умение сохранять заданную цель, умение видеть указанную ошибку и исправлять её, осуществлять	

							самоконтроль в форме сличения с результатом.	
32/12	Задача о нахождении кратчайшего расстояния между графиком функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$.	Урок применения практических навыков	Уметь находить кратчайшее расстояние между графиком функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$.	Умение адекватно воспринимать оценку учителя	Построение логической цепи рассуждений умение строить речевое высказывание, работа с моделями, работа по алгоритму, сравнение, анализ обсуждения проблемы поиск путей решения проблемы.	Сотрудничество с учителем и сверстниками, умение точно выразить свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации, соблюдать простейшие нормы речевого элемента,.	Целеполагание, корректировать способы действия, умение сохранять заданную цель, умение видеть указанную ошибку и исправлять её	

Итоговый контроль – 2 часа

Выходной контроль

Вариант I

1. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x^2 - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3}{x^4 + 10x^3 + 10x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}$

2. Найти асимптоты функции $y = x - \frac{2}{x^2}$

3. Решить задачу.

Стальной бак без верхней крышки должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и объёмом 108 дм^3 . При каких размерах бака на его изготовление пойдёт наименьшее количество стали, если дополнительно известно, что сторона не должна превышать 4 дм.?

4. Найти наибольшее расстояние от точки $M(2;1)$ до кривой $y = 1 - \sqrt{19 - 3x^2}$

5. К графику функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ в точках $A\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ проведены касательные. Найдите угол в градусах

между этими касательными.

6. Составить уравнение параболы вида $y = -x^2 + px + g$, касающейся параболы $y = x^2 - 4x - 3$ в точке с абсциссой $x = 2$

7. Найти значение параметра a , при котором прямая $y = ax - (4 + 15)$ является касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 - 2x - 15$ ответ $a=6$ или -10

Выходной контроль

Вариант II

1. Вычислить пределы

а) $\lim_{a \rightarrow 4} \frac{a^3 - 64}{a^2 - 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^2 - x^3}{x^4 - x^2 + 11x + 7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$

2. Найти асимптоты функции $y = x + \frac{2}{x^2}$

3. Решить задачу.

Невысокий стальной бак без верхней крышки должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и объёмом 256 дм^3 , а его высота не должна превышать 1 дм. При каких размерах поддона на его изготовление пойдёт наименьшее количество стали?

4. Найти наименьшее расстояние от точки с координатами $(1;0)$ до графика функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

5. К графику функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в точках $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$ проведены касательные. Найдите угол в градусах между этими касательными.

6. Составить уравнение параболы вида $y = -x^2 + px + g$, касающейся параболы $y = x^2 - 5x + 4$ в точке с абсциссой $x = -2$

7. Найти значение параметра a , при котором прямая $y = ax - (7 + 11)$ является касательной к графику функции $f(x) = 7x^2 - 2x - 11$ ответ $a=12$ или -16

ОТВЕТЫ К ВЫХОДНОМУ КОНТРОЛЮ

№ заданий	B1	B2	B3	B4	B5	C1	C2
1 вариант	а) $-4,5$; б) ∞ ; в) 3 .	$X = 0$ -горизонтальная асимптота; $Y = x$ – наклонная асимптота.	В основании квадрат со стороной 4 дм, высота бака $6,75$ дм.	5	90^0	$y = -x^2 + 4x + 3$	$a = 6$ или $a = -10$
2 вариант	а) 6 ; б) 0 ; в) $1,5$.	$X = 0$ -горизонтальная асимптота; $Y = x$ – наклонная асимптота.	В основании квадрат со стороной 16 дм, высота бака 1 дм.	3	90^0	$y = -x^2 - 13x - 4$	$a = 12$ или $a = -16$

КРИТЕРИЙ ОЦЕНИВАНИЯ

№ задания	B1	B2	B3	B4	B5	C1	C2
Кол-во баллов	2	1	2	2	2	3	4

«5» - 14 – 16 баллов

«4» - 11 – 13 баллов

«3» - 7 – 10 баллов

«2» - менее 7 баллов

Формы и содержание контроля

№ урока	Текущий контроль
1/1	<p>Входной контроль (тест)</p> <p>1 вариант.</p> <p>Часть 1.</p> <p>A1. Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 0,5x^2 - 3x + 2$ и вычислите ее значение при $x = -1$ а) -2,5; б) 1,5; в) -1,5; г) 2,5.</p> <p>A2. Найдите производную функции $g(x) = \frac{3+2x}{x-5}$. а) $-13/(x-5)^2$; б) $8/(x-5)^2$; в) $-5/(x-5)^2$; г) $(1-x)/(x-5)^2$.</p> <p>A3. Для функции $g(x) = 3\sin^2x$ вычислите $g'(\pi/4)$. а) 6; б) -3; в) -1,5; г) 0,5.</p> <p>4. Дана функция $f(x) = x + \frac{8}{x}$. Решите уравнение $f'(x) = 0$. а) 0 ; 2; б) $\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; г) -2 ; 2.</p> <p>A5. Точка движется по координатной прямой по закону $S(t) = -t^2 + 10t - 7$. Найдите скорость движения точки в момент времени $t = 3$. а) -5; б) 14; в) 19; г) 4.</p> <p>A6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 4x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$. а) $y = -2x - 3$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = -2x + 3$; г) $y = 2x + 3$.</p> <p>A7. Дана функция $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$. Найдите ее критические точки. а) 2 ; -1; б) 1 ; -2; в) -3 ; 1; г) -2 ; 3 .</p> <p>Часть 2.</p> <p>B1. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = \frac{3x+2}{1-4x}$.</p> <p>B2. Найдите экстремумы функции $f(x) = (6-3x)\sqrt{x}$.</p> <p>B3. При каком значении x функция $f(x) = x^3 - x^2$ на промежутке $[0,5 ; 1]$</p>

принимает наименьшее значение.

Часть 3.

C1. Площадь прямоугольника равна 81 см^2 . Найдите наименьший возможный периметр этого прямоугольника.
2 вариант.

Часть 1.

A1. Найдите производную функции $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 1,5x^2 + 5x - 3$ и вычислите ее значение при $x = -2$

а) -3; б) -5; в) 2; г) 3.

A2. Найдите производную функции $g(x) = \frac{4-3x}{x+2}$.

а) $2/(x+2)^2$; б) $-10/(x+2)^2$; в) $10/(x+2)^2$; г) $-2/(x+2)^2$.

A3. Для функции $f(x) = 5\cos^2 x$ вычислите $f'(-3\pi/4)$.

а) 5; б) -10; в) -5; г) 10.

4. Дана функция $g(x) = 3x + \frac{9}{x}$. Решите уравнение $g''(x) = 0$.

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}; 3$; в) $0; \sqrt{3}$; г) $-\sqrt{3}; \sqrt{3}$.

A5. Точка движется по координатной прямой по закону $S(t) = -t^2 + 9t + 8$.

Найдите скорость движения точки в момент времени $t = 4$.

а) 9; б) 25; в) 1; г) -25.

A6. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 6x + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

а) $y = 2x - 6$; б) $y = 10x + 12$; в) $y = 4x + 8$; г) $y = -10x + 8$.

A7. Дана функция $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$. Найдите ее критические точки.

а) -1; 3; б) 0,5; 2; в) -1,5; 2; г) 1,5; -2.

Часть 2.

B1. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = \frac{1+4x}{2x-3}$.

B2. Найдите экстремумы функции $f(x) = (8+2x)/\sqrt{x}$.

B3. При каком значении x функция $f(x) = x^4 + x^3$ на промежутке $[-1; -0,5]$

принимает наименьшее значение.

Часть 3.

C1. Площадь прямоугольника равна 25 см^2 . Найдите наименьший возможный периметр этого прямоугольника.

7/6

Творческое задание. Подобрать задания по раскрытию неопределённостей. (по таблице)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
a	b	a+b	ab	$\frac{a}{b}$ (b≠0)
a	∞	∞	∞ (a≠0)	0
∞	b	∞	∞ (b≠0)	∞
0	0	0	0	Неопределённость $\frac{0}{0}$
0	∞	∞	Неопределённость $0 \cdot \infty$	0
∞	0	∞	Неопределённость $\infty \cdot 0$	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$
$+\infty$	$-\infty$	Неопределённость $\infty - \infty$	$-\infty$	Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$
$-\infty$	$+\infty$	Неопределённость $\infty - \infty$	$-\infty$	Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$

9/8

Тест Вычислить пределы

1 вариант

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$;

- 1) 1 1) 2
 2) 0 2) 6
 3) -1 3) 0

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} \cos n$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - n - 1}{n^2 - 1} \right)^3$;

- 1) -1 1) 2
 2) 0 2) 6
 3) 1 3) 8

д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}$.

- 1) -4
 2) $\frac{-4}{3}$
 3) 0

Ключ

	а	б	в	г	д
I	1	2	2	3	2
II	3	1	1	2	2

2 вариант

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+4}{x^2-2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16-x^2}{4-x}$;

- 1) 0 1) 8
 2) 2 2) 0
 3) 4 3) -1

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) \sin n$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n - 2}{2n^2 - 2} \right)^2$;

- 1) 0 1) 0,5
 2) 1 2) 0,25
 3) -1 3) 1

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$

- 1) 1,5
 2) 4
 3) -4

14/5	<p>Срезовая работа на 15 мин.</p> <p>Найти все асимптоты графика функции</p> <p>1 вариант $y = \frac{5(x^3 - 2)}{x^2}$ ответ: $x=0$ вертикальная асимптота $y=5x$ наклонная асимптота</p> <p>2 вариант $y = \frac{x^2}{x-1}$ ответ: $x=1$ вертикальная асимптота $y=x+1$ наклонная асимптота</p>
20/3	<p>Самостоятельная работа</p> <p>Исследовать функцию по общей схеме и построить её график</p> <p>1 вариант а) $y = x^2(\sqrt{x} - 1)$; б) $y = 6 \sin x - \cos 2x$</p> <p>2 вариант а) $y = x^2\sqrt{1-2x}$; б) $y = 2 \sin x + 3 \cos x$</p>
33-34/1-2	<p>Итоговый контроль</p> <p>Выходной контроль</p> <p>Вариант I</p> <p>1. Вычислить пределы</p> <p>а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x^2 - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3}{x^4 + 10x^3 + 10x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x}$</p> <p>2. Найти асимптоты функции $y = x - \frac{2}{x^2}$</p> <p>3. Решить задачу. Стальной бак без верхней крышки должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и объёмом 108 дм^3. При каких размерах бака на его изготовление пойдёт наименьшее количество стали, если дополнительно известно, что сторона не должна превышать 4 дм.?</p> <p>4. Найти наибольшее расстояние от точки $M(2;1)$ до кривой $y = 1 - \sqrt{19 - 3x^2}$</p> <p>5. К графику функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ в точках $A\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ проведены касательные. Найдите угол в градусах между этими касательными.</p>

6. Составить уравнение параболы вида $y = -x^2 + px + g$, касающейся параболы $y = x^2 - 4x - 3$ в точке с абсциссой $x = 2$

7. Найти значение параметра a , при котором прямая $y = ax - (4 + 15)$ является касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 - 2x - 15$ ответ $a=6$ или -10

Выходной контроль

Вариант II

1. Вычислить пределы

а) $\lim_{a \rightarrow 4} \frac{a^3 - 64}{a^2 - 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^2 - x^3}{x^4 - x^2 + 11x + 7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$

2. Найти асимптоты функции $y = x + \frac{2}{x^2}$

3. Решить задачу.

Невысокий стальной бак без верхней крышки должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и объёмом 256 дм^3 , а его высота не должна превышать 1 дм . При каких размерах поддона на его изготовление пойдёт наименьшее количество стали?

4. Найти наименьшее расстояние от точки с координатами $(1; 0)$ до графика функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

5. К графику функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в точках $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$ проведены касательные. Найдите угол в градусах между этими касательными.

6. Составить уравнение параболы вида $y = -x^2 + px + g$, касающейся параболы $y = x^2 - 5x + 4$ в точке с абсциссой $x = -2$

7. Найти значение параметра a , при котором прямая $y = ax - (7 + 11)$ является касательной к графику функции $f(x) = 7x^2 - 2x - 11$ ответ $a=12$ или -16

	Базовый уровень			Продвинутый уровень		
	ЗЗ	МЗ	НЗ	ЗЗ	МЗ	НЗ
Составление уравнения касательной, проходящей через точку, принадлежащую графику функции $y = f(x)$	Составить уравнение касательной, проходящей через точку $M(1;-3)$ к графику функции $y = x^2 - 4x$ Ответ: $y = -2x - 1$	Составить уравнение касательной к линии $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$	Составить уравнение нормали в точке $M(1;-3)$ к графику функции $y = x^2 - 4x$ Ответ: $y = 0,5x - 3,5$	Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения её с осью OX Ответ: $A(-1,0), y = x + 1$ $B(3;0), y = -x + 3$	Составить уравнение нормали к линии $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$ Ответ: $27x - 3y - 79 = 0$	Составить уравнение касательной к графику окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $M_0(x_0; \sqrt{R^2 - x_0^2})$, $ x_0 \neq R$ Ответ: $xx_0 + yy_0 = R^2$, где M_0 - точка окружности
Составление уравнения касательной, проходящей через точку, не принадлежащую графику функции $y = f(x)$	Написать уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 - 4x + 2$, проходящей через точку $M(-3;6)$ Ответ: $y = 6$ или $y = 4x + 18$	Написать уравнения всех касательных к графику функции $y = x^2 + 2$, проходящей через точку $M(-1;2)$ Ответ: $y = 2, y = -4x - 2$	Найти уравнения всех прямых, проходящих через точку $C(-3;-4)$ и касающихся окружности $x^2 + y^2 = 1$ Ответ: $y = \frac{6 + \sqrt{6}}{4}x + \frac{2 + 3\sqrt{6}}{4}$ $y = \frac{6 - \sqrt{6}}{4}x + \frac{2 - 3\sqrt{6}}{4}$	Написать уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 7x + 6 $, проходящих через точку $M(8;-10)$ Ответ: $y = (9 + 2\sqrt{24})x - 82 - 16\sqrt{24}$	Проведите касательные к гиперболе $y = \frac{x + 9}{x + 5}$, так, чтобы они прошли через начало координат. Ответ: $x + 25y = 0$, $x + y = 0$	Написать уравнения касательных к параболу $y = x^2 - 3x + 1$, проведённых из точки $A(4;1)$. Вычислите угол между касательными.

Составление уравнения касательной, параллельной заданной прямой $y = kx + b$. нахождение расстояния между параллельными касательными.	Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 3$, параллельно прямой $y = 9x + 1$ Ответ: $y = 9x + 8$ или $y = 9x - 24$	Составить уравнения всех касательных к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 3$, параллельно прямой $y = 9x + 1$ Ответ: $y = 9x + 8$, $y = 9x - 24$	В каких точках графика функции $y = x^3 + x - 2$ касательная к нему параллельна прямой $y = 4x - 1$, написать уравнения этих касательных Отв: $A(1;0), B(-1;-4)$ $y = 4x - 4$, $y = 4x$	На линии $y = \frac{1}{1 + x^2}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс. Ответ: $A(0;1)$	Найти все значения x_0 при каждом из которых касательные к графикам функций $y = 5\cos 3x + 2$ и $y = 3\cos 5x$ в точках с абсциссой x_0 параллельны. Ответ: $m, n \in Z, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, m \in Z$	Хорда параболы $y = x^2 - 2x + 5$ соединяет точки с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$. составить уравнение касательной к параболу, параллельной хорде. Ответ: $y = 2x + 1$
--	---	--	--	---	---	---

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых	Составить уравнение той касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 5$, которая перпендикулярна к прямой $2x - 6y + 1 = 0$ Ответ: $3x - 6y + 1 = 0$	Составить уравнение той нормали к параболе $y = x^2 - 6x + 6$, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы. Ответ: $4x - 4y + 21 = 0$	Составить уравнения тех касательных к гиперболе $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, которые перпендикулярны к прямой $2x + 4y - 3 = 0$. Ответ: $2x - y \pm 1 = 0$	Составить уравнения тех касательных к гиперболе $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, которые перпендикулярны к прямой $2x + 4y - 3 = 0$. Ответ: $2x - y \pm 1 = 0$	Составить уравнения тех касательных к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, которые перпендикулярны к прямой $sx + dy + e = 0$.	Составить уравнения тех касательных к окружности $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$ которые перпендикулярны к прямой $sx + dy + e = 0$.
Составление уравнения касательной, образующей с данной прямой $y = kx + b$ угол α (острый или прямой)	Написать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, образующей с прямой $y = 0$ угол 45° Ответ: $y = x - 7$	В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x + 2}{x - 2}$ образует с осью OX угол 135° ? Угол отсчитывается по часовой стрелке. Ответ: A(4;3); B(0;-1)	Составить уравнение той касательной к параболе $y = 2x^2 - 5x - 2$, которые пересекаются под прямым углом и одна из них касается в точке с абсциссой 3 Ответ: $y = 7x - 20$ и $y = -\frac{1}{7}x - \frac{885}{196}$	Показать, что линия $y = x^5 + 5x - 12$ во всех своих точках наклонена к оси OX под острым углом. Ответ: $y' > 0$ в любой точке.	Составить уравнение касательное к параболе $y = 1 - x^2$, которая образует с прямой $y = 0,5x - 10$ угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$ Ответ: $y = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}x + \frac{623 + 80\sqrt{3}}{484}$	Составить уравнения касательных к окружности $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$ которые образуют с данной прямой $x - y + 3 = 0$ угол $\varphi = \frac{\pi}{12}$ Ответ: $3x \pm \sqrt{21}y = 6$
Вычисление углов под которыми графики данных кривых пересекают ось координат. Вычисление углов между кривыми в точке их пересечения.	Определить, под каким углом парабола $y = x^2 + 2x - 8$ пересекает ось абсцисс Ответ: $\varphi = \pi - \arctg 6$ $\varphi = \arctg 6$	Определить, под каким углом графики функций $y = \sin x$ $y = 2 \sin\left(\frac{3x}{\pi}\right)$ пересекают ось абсцисс в точке (0;0) Ответ:	Вычислить углы между прямой $y = x + 2$ и параболой $y = 2x^2 + 4x - 3$ Ответ: $\arctg \frac{7}{5}; \arctg \frac{7}{9}$	Вычислить углы между прямой $y = x + 2$ и параболой $y = 2x^2 + 4x - 3$ Ответ: $\arctg \frac{7}{5}; \arctg \frac{7}{9}$	Под каким углом пересекаются графики $y = 2x^2 + 3x - 3$ и $y = x^2 + 2x + 3$ Ответ: $\arctg \frac{5}{37}; \arctg \frac{5}{67}$	Найти углы, образуемые параболой $y = 2x - x^2$ и хордой, соединяющей точки с абсциссами 1 и 4 Ответ: $\arctg 3; \arctg \frac{3}{19}$

		$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{6}{\pi}\right)$				
Нахождение условий (на параметр, на функцию) при которых графики данных прямой и кривой касаются.	При каких значениях параметра b прямая $y=9x+b$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x + 15$ Ответ: $b=-1$ или $b=31$	При каких значениях параметра k прямая $y=kx-10$ имеет только одну общую точку с графиком функции $y = 2x^2 + 3x - 2$ Ответ: $k=5$ или $k=11$	При каком значении параметра k парабола $y = x^2 + kx + 1$ касается оси абсцисс. Ответ: $k=-2; k=2$	При каком значении параметра k парабола $y = x^2 + kx + 1$ касается оси абсцисс. Ответ: $k=-2; k=2$	Найти все значения параметров b и c , при которых прямая $y=2x+2b$ касается графика параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке $M(2;0)$ Ответ: $b=-2, c=0$	При каких значениях параметра p прямая $y=px-5$ касается параболы $y = 3x^2 - 4x - 2$ Ответ: $p=-1, p=2$
Определение величины угла, под которым из данной точки виден график данной функции	К графику функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ в точках $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ проведены касательные. Найти угол (в градусах) между ними. Ответ: 90°	К параболе $y=4x^2-x$ в точках её пересечения с осью абсцисс проведены касательные. Найти угол (в градусах) между ними. Ответ: 90°	Касательные к графикам функций $f(x) = 2\sqrt{5x-1}$ и $g(x) = 5\sqrt{2x+1}$ проведены в точках графиков с одинаковыми абсциссами, параллельны. Напишите уравнения этих касательных ответ: $y = \frac{3}{5}x + \frac{41}{5}$ $y = \frac{3}{5}x + \frac{66}{5}$	Определить величину угла под которым из точки $M(-3;6)$ виден график функции $y = 2 - 4x - x^2$ Ответ: $\pi - \operatorname{arctg} 4$	Определить угол, под которым из точки $M(-1;1)$ видна парабола $y = x^2 + 2$ Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$	Под каким углом из точки $C(-3;-4)$ видна окружность $x^2 + y^2 = 1$ Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{6}}{23}$

Приложения

Задача 3. Составьте уравнения касательной и нормали к графику ок-

ружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $M_0(x_0; \sqrt{R^2 - x_0^2})$,
 $|x_0| \neq R$.

Решение.

1) Точка M_0 принадлежит графику окружности, т.к. ее координаты удовлетворяют уравнению окружности:

$$x_0^2 + (\sqrt{R^2 - x_0^2})^2 = R^2; \quad x_0^2 + R^2 - x_0^2 = R^2; \quad R^2 = R^2, \text{ верно.}$$

Заметим, что точка M_0 принадлежит верхней полуокружности, т.к. ее ордината положительна по условию.

2) Для определения углового коэффициента касательной выразим $y(x)$ явно через x :

$$|y| = \sqrt{R^2 - x^2}; \quad \text{т.к. } y > 0 \text{ по условию, то } y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}; \quad y'(x_0) = \frac{-x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}} - \text{частное зна-}$$

чение производной в точке x_0 , оно равно угловому коэффициенту касательной. Положим для удобства

$$y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}, \text{ тогда } y'(x_0) = \frac{-x_0}{y_0}.$$

3) Подставляя $x_0; y_0; y'(x_0) = \frac{-x_0}{y_0}$ в общее уравнение получим

$$y - y_0 = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0); \quad xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2 \Leftrightarrow xx_0 + yy_0 = R^2 -$$

уравнение касательной к окружности в точке $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей окружности. Аналогично для уравнения нормали $xy_0 = yx_0$ - уравнение нормали.

Заметим, что нормаль проходит через начало координат, то есть через центр окружности. Это соответствует известной теореме из геометрии, согласно которой радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной

Задача 1. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y = -x^2 - 4x + 2$, проходящих через точку $M(-3; 6)$.

Решение.

1. Так как $y(-3) = -9 + 12 + 2 = 5$, то точка $M(-3; 6)$ лежит выше графика.
2. Пусть x_0 - абсцисса точки касания искомой касательной, тогда $y_0 = -x_0^2 - 4x_0 + 2$ - ордината точки касания.
3. Находим угловой коэффициент касательной в неизвестной точке x_0 : $y'(x) = -2x - 4; \quad y'(x_0) = -2x_0 - 4$. Подставляя $x_0, y_0, y'(x_0)$ в общее уравнение, получим $y + x_0^2 + 4x_0 - 2 = (-2x_0 - 4)(x - x_0);$
 $y + x_0^2 + 4x_0 - 2 = (-2x_0 - 4)x + 2x_0^2 + 4x_0; \quad y = (-2x_0 - 4)x + x_0^2 + 2;$
 - уравнение касательной в неизвестной точке x_0 . Касательная проходит через точку $M(-3; 6)$, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной.

$$6 = (-2x_0 - 4)(-3) + x_0^2 + 2;$$

$$x_0^2 + 6x_0 + 8 = 0;$$

$$\begin{cases} x_0 = -4, \\ x_0 = -2. \end{cases}$$

При $x_0 = -4$ уравнение касательной имеет вид $y = 4x + 18;$

При $x_0 = -2$ уравнение касательной имеет вид $y = 6.$

Ответ: $y = 6; y = 4x + 18.$

Задача. Проведите касательные к гиперболе

$y = \frac{x+9}{x+5}$ так, чтобы она прошла через начало координат.

Решение:

1. Точка О (0;0) не является точкой касания

2. Точка А(x₀; y₀) – точка касания, значит

$$y_0 = \frac{x_0 + 9}{x_0 + 5}; \quad y' = \frac{-4}{(x+5)^2}$$

3. Угловой коэффициент касательной

$$\kappa = y_0' = \frac{-4}{(x_0 + 5)^2}$$

4. Уравнение касательной

$$y = \frac{-4}{(x_0 + 5)^2} (x - x_0) + \frac{x_0 + 9}{x_0 + 5}$$

5. Касательная проходит через начало

координат, значит $\frac{18x_0 + x_0^2 + 45}{(x_0 + 5)^2} = 0$, $x_{01} = -3, x_{02} = -15$

6. Тогда $y_{01} = 3, y_{02} = 0,6$

7. $\kappa_1 = -1, \kappa_2 = -0,4$, значит, уравнения

касательных будут иметь вид: $y = -x, y + x = 0$ и

$$y = -0,04x, x + 25y = 0$$

Ответ: $y + x = 0, x + 25y = 0$

Задача. В каких точках график функции

$y = x^3 + x - 2$ касательная к нему параллельна

прямой $y = 4x - 1$. Записать уравнения этих касательных

1. Угловой коэффициент касательных $\kappa = 4$

2. $y' = 3x^2 + 1 = \kappa = 4$, значит $x_{01} = 1, x_{02} = -1$.

абсциссы точек касания.

3. $y_{01} = 0, y_{02} = -4$, значит точки касания А(1;0),

В(-1;-4)

4. Уравнения касательных: $y = 4x - 4$ для точки А

$y = 4x$ для точки В

Ответ: точки касания А(1;0), В(-1;-4); уравнения

касательных: $y = 4x - 4; y = 4x$

Используемая литература

1. А.А. Максютин «Математика – 10» Индивидуальные домашние задания по алгебре, началам анализа и геометрии для учащихся 10-х классов с историко-математическими справками и приложениями. Издание 2, переработанное и дополненное. г. Самара, 2002г.
2. С.М. Никольский «Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы. Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. Элективные курсы. М., Просвещение, 2010г.
3. А.Т. Рогов «Задачник по высшей математике для техникумов» издание 2 переработанное под редакцией М.И. Грабаря Издательство «Высшая математика» М. 1973г.
4. Т.А. Лепёхина «Математика 10-11 классы. Пределы и производные. Теория и практика решения задач» Издательство «Учитель» Волгоград, 2009г.
5. П.В. Семёнов «ЕГЭ шаг за шагом. Алгебра и начала анализа». Учебное пособие. 2-е изд. – М. :Мнемозина, 2008г.
6. А.Н. Рурукин Контрольно-измерительные материалы. Алгебра и начала анализа: 10 класс. Москва. «ВАКО»
7. Г.В. Касаткин «Готовимся в вуз. Задачи и тесты по математике. М., «Дрофа», 2004г.

8.



A10_026_p03.oms



A10_026_p02.oms